ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NINH THỊ NỤ

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM TRONG LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NINH THỊ NỤ

MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẾM TRONG LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu **1**

Chương 1. Mở đầu đại số tổ hợp và lý thuyết đồ thị **3**

1.1. Đại số tổ hợp 3

1.2. Công thức đa thức 12

1.3. Mở đầu lý thuyết đồ thị 14

Chương 2. Bài toán đếm trên đồ thị **23**

2.1. Cây và các bài toán đếm cây 23

2.2. Công thức tính số cây khung 29

2.3. Đánh giá số cạnh của một đồ thị phẳng 34

2.4. Số tam giác trong đồ thị 38

Kết luận **41**

Tài liệu tham khảo **41**

Mở đầu

Cùng với sự phát triển với tốc độ nhanh của công nghệ thông tin, lý thuyết tổ hợp và đồ thị đã trở thành các lĩnh vực toán học quan trọng và cần thiết cho nhiều lĩnh vực khoa học và ứng dụng. Lý thuyết tổ hợp là chiếc cầu nối giữa các bài toán cần được giải quyết với công cụ tính toán, còn đồ thị là mô hình trực quan để mô tả các quan hệ hai ngôi.

Trong những thập kỷ gần đây, người ta đã quan tâm nhiều tới đồ thị và các ứng dụng của nó. Đó là do đồ thị đã chứng tỏ được là một mô hình hữu hiệu cho tính toán và tối ưu. Ngày nay khái niệm đồ thị đã xâm nhập không chỉ vào các lĩnh vực khoa học tự nhiên truyền thống như toán học, vật lý học hay hoá học, mà còn vào nhiều lĩnh vực khoa học tự nhiên và xã hội khác.

Có nhiều bài toán toán về lý thuyết đồ thị cần được tìm hiểu như bài toán tối ưu trên đồ thị, bài toán tô màu đồ thị, cấu trúc đồ thị, ... Các bài toán về đồ thị cũng thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi các cấp. Luận văn tìm hiểu về một số bài toán đếm trên lý thuyết đồ thị như bài toán đếm cây; tính số cây khung; tìm mối liên hệ giữa một số yếu tố trong đồ thị như cạnh, đỉnh; đếm số tam giác trên đồ thị.

Luận văn được chia làm hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về đại số tổ hợp, công thức đa thức và mở đầu về lý thuyết đồ thị. Tuy là kiến thức chuẩn bị cho Chương 2 nhưng đối với tác giả nhiều kiến thức của chương là kiến thức mới và có nhiều ứng dụng trong giải toán phổ thông. Chương này chủ yếu tham khảo theo các tài liệu [1, 2, 4]. Chương 2 trình bày về một số bài toán đếm cơ bản trong lý thuyết đồ thị. Bắt đầu là bài toán đếm về cây. Việc đếm số đỉnh, số cảnh của cây cũng cho ta một số đặc trưng của cây (Định lý móc xích kiểu hoa cúc). Tiếp theo luận văn tìm hiểu về số cây trên tập đỉnh cho trước, số cây có n đỉnh cho trước, với n là

một số nguyên dương. Luận văn cũng tìm hiểu cách tính số cây khung bằng ma trận Laplacian. Việc đánh giá số đỉnh, số cạnh của đồ thị phẳng cũng được xem là bài toán đếm. Cuối cùng luận văn trình bày một số đánh giá về việc đếm số tam giác trong đồ thị, bài toán này cũng thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi. Chương 2 tham khảo chính theo các tài liệu [4, 6, 7, 8, 9]].

Trong quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học khóa Cao học Toán khóa 11E (2017-2019) - trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 01 năm 2019

Tác giả

Ninh Thị Nụ

Chương 1

Mở đầu đại số tổ hợp và lý thuyết đồ thị

1.1. Đại số tổ hợp

Mục này nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị về Đại số tổ hợp như các quy tắc đếm cơ bản, các công thức tổ hợp. Tài liệu tham khảo chính của mục 1.1 và 1.2 là

1. Trần Nguyên An và Nguyễn Văn Hoàng (2016), *Tập hợp và logic Toán,* NXB Đại học Thái Nguyên.

2. Ngô Đắc Tân (2003), *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Người ta thường phân biệt nhiều mức độ trong việc giải các bài toán tổ hợp. Mức độ đầu tiên là tìm ít nhất một cách *bố trí* những đối tượng có tính chất đã cho. Nếu bài toán tổ hợp có nhiều lời giải thì vấn đề đặt ra là *đếm* số lời giải, và mô tả tất cả các lời giải của các bài toán đã cho. Cuối cùng, nếu các lời giải khác nhau được phân biệt với nhau bởi những tham số nào đó, thì vấn đề đặt ra là tìm lời giải *tối ưu* của bài toán đã cho. Ở đây chúng ta sẽ chỉ giới hạn vào việc đếm số lời giải của bài toán tổ hợp.

Để làm việc này, người ta thường áp dụng những công thức thiết lập cho từng loại bài toán. Tất cả các công thức ấy, xét cho cùng, đều dựa trên hai quy tắc đơn giản là quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Định nghĩa 1.1.1 (Quy tắc cộng)**.** Nếu một công việc nào đó có thể thực hiện theo n phương án khác nhau, trong đó: phương án 1 có m_1 cách thực hiện, phương án 2 có m_2 cách thực hiện, ..., phương án thứ n có m_n cách thực hiện. Khi đó, có: $m_1 + m_2 + ... + m_n$ cách để hoàn thành công việc đã

cho.

Ta phát biểu quy tắc cộng theo ngôn ngữ tập hợp: Gọi A_1 là tập hợp các đối tượng x_1, A_2 là tập hợp các đối tượng x_2, ..., A_n là tập hợp các đối tượng x_n. Mỗi cách chọn đối tượng x_i ứng với một phần tử của A_i và đảo lại. Điều kiện "cách chọn đối tượng x_i không trùng với bất kỳ đối tượng x_j, $(j \neq i)$" được diễn tả theo ngôn ngữ tập hợp bằng điều kiện: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$; $i, j = 1, 2, ..., n$. Cách chọn "x_1 hoặc x_2 ... hoặc x_n" được phiên dịch thành cách chọn một phần tử của tập hợp $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Các số $m_1, m_2, ..., m_n$ theo thứ tự là số phần tử của tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$, tức là, theo cách ký hiệu quen thuộc $m_1 = |A_1|$, $m_2 = |A_2|, ..., m_n = |A_n|$.

Mệnh đề 1.1.2. *Nếu $A_1, ..., A_m$ là các tập hợp hữu hạn đôi một rời nhau, khi đó:*

$$|A_1 \cup ... \cup A_m| = |A_1| + \ ... + |A_{m-1}| + |A_m|.$$

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho công thức $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$, trong đó A_1,..., A_n là các tập hợp hữu hạn tùy ý (không nhất thiết đôi một rời nhau). Công thức này được gọi là *Nguyên lý bao hàm và loại trừ.*

Định lý 1.1.3 (Nguyên lý bao hàm và loại trừ)**.** *Giả sử $A_1, A_2, ...A_n$. Là các tập hữu hạn bất kỳ. Khi đó:*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = &\sum_{1 \le i_1 \le n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + ... \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le ... i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| + ... \\ &+ (-1)^{n+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}|.\end{aligned}$$

Định nghĩa 1.1.4 (Quy tắc nhân)**.** Nếu một công việc nào đó phải hoàn thành qua m giai đoạn liên tiếp, trong đó: giai đoạn 1 có m_1 cách thực hiện, giai đoạn 2 có m_2 cách thực hiện, ..., giai đoạn n có m_n cách thực hiện. Khi đó, có: $m_1.m_2...m_n$ cách để hoàn thành công việc đã cho.

Mệnh đề 1.1.5. *Cho s tập hợp hữu hạn $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$. Khi đó*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1|.|A_2|...|A_n|.$$

Định nghĩa 1.1.6. *Cho X là một tập hợp có n phần tử và $k > 0$ là một số tự nhiên. Một chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự*

gồm k phần tử của X. Ta kí hiệu $\overline{A}_n^k$ là số chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử.

Ví dụ 1.1.7. *Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó (a, a, b, c) là một chỉnh hợp có lặp chập 4 của 3 phần tử. Những bộ $(b, a, a), (a, b, c)$ là những chỉnh hợp có lặp chập 3 của 3 phần tử. Tất cả các chỉnh hợp có lặp chập 2 của 3 phần tử là*

$$(a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b),\ (c, c).$$

Do đó $\overline{A}_3^2 = 9$.

Mệnh đề 1.1.8. *Chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử được cho bởi công thức*

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Định nghĩa 1.1.9. *Cho X là một tập hợp có n phần tử và $0 < k \leq n$ là một số tự nhiên. Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử phân biệt của X. Ta kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử.*

Ví dụ 1.1.10. *Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó (a, b, c) là một chỉnh hợp không lặp chập 3 của 3 phần tử; (b, a, a) không là chỉnh hợp không lặp chập 3 của 3 phần tử. Các chỉnh hợp không lặp chập 2 của 3 phần tử là $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c)$, $(c, a), (c, b)$. Do đó $A_3^2 = 6$.*

Mệnh đề 1.1.11. *Số các chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử được cho bởi công thức*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

trong đó ta quy ước $0! = 1$.

Cho thuận tiện, ta quy ước rằng có đúng một chỉnh hợp không lặp chập 0 của n phần tử.

Định nghĩa 1.1.12. *Cho X là một tập hợp có n phần tử. Một hoán vị của n phần tử là một bộ sắp thứ tự gồm n phần tử phân biệt của X. Ta kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử.*

Ví dụ 1.1.13. *Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó các hoán vị của 3 phần tử là*

$$(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (a, c, b), (c, b, a)(b, a, c).$$

Do đó $P_3 = 6$.

Mệnh đề 1.1.14. *Số các hoán vị của n phần tử được cho bởi công thức* $P_n = n!$.

Định nghĩa 1.1.15. *Cho* n, k *là các số tự nhiên sao cho* $0 \leq k \leq n$. *Cho* X *là một tập gồm n phần tử. Một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con của* X *gồm k phần tử. Ta kí hiệu* C_n^k *là số tổ hợp chập k của n phần tử.*

Ví dụ 1.1.16. *Cho* $k = 2$ *và* $n = 4$. *Cho* $X = \{a, b, c, d\}$. *Khi đó các tổ hợp chập 2 của 4 phần tử trong tập* X *là*

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Do đó $C_4^2 = 6$.

Mệnh đề 1.1.17. *Công thức tính số các tổ hợp chập k của n phần tử được cho bởi công thức*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

trong đó ta quy ước $0! = 1$.

Mệnh đề 1.1.18. *Cho* k, n *là các số tự nhiên sao cho* $0 \leq k \leq n$. *Khi đó ta có*

(i) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

(ii) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

(iii) Với n và k là các số nguyên dương ta có

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}.$$

Mệnh đề 1.1.19. *Cho số tự nhiên* $n > 1$ *và cho* a, b *là hai số thực. Khi đó ta có*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Hệ quả 1.1.20. *Với mỗi số tự nhiên n ta có*

(i) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$. *Do đó, có* 2^n *các tập con của một tập gồm n phần tử.*

(ii) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

(iii) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{k-1}kC_n^k + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$ *với mọi* $n \geq 2$.

(iv) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$ *với mọi* $n \geq 1$.

Kết quả sau đây cho ta cách đếm số phân hoạch một tập hợp có m phần tử cho trước thỏa mãn một số yêu cầu.

Định lý 1.1.21. *Cho các số tự nhiên* $k_1, k_2, \ldots, k_s$ *sao cho* $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = m$. *Khi đó số phân hoạch một tập hợp* A *gồm* m *phần tử khác nhau thành hợp rời rạc của* s *tập con* $B_1, B_2, \ldots, B_s$, *với số phần tử theo thứ tự là* $k_1, k_2, \ldots, k_s$, *bằng*

$$\frac{m!}{k_1!.k_2!\ldots k_s!}.$$

Chứng minh. Ta có thể thực hiện các phân hoạch đã mô tả trên đây của tập A thành s tập con $B_1, B_2, \ldots, B_s$ như sau: Ta lấy một tập con B_1 bất kỳ chứa k_1 phần tử của tập hợp A (điều này có thể thực hiện theo $C_m^{k_1}$ cách), trong $m - k_1$ phần tử còn lại, ta lấy một tập con B_2 chứa k_2 phần tử (điều này có thể thực hiện theo $C_{m-k_1}^{k_2}$ cách)... Khi đó, theo quy tắc nhân, số tất cả các cách chọn các tập con $B_1, B_2, \ldots, B_s$ là

$$\begin{aligned}
&C_m^{k_1} \times C_{m-k_1}^{k_2} \times C_{m-k_1-k_2}^{k_3} \ldots \times C_{m-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}^{k_s} \\
&\quad = \frac{m!}{k_1!(m-k_1)!} \times \frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!} \times \frac{(m-k_1-k_2)!}{k_3!(m-k_1-k_2-k_3)!} \\
&\quad \times \ldots \times \frac{(m-k_1-k_2-\ldots-k_s)!}{k_s!(m-k_1-k_2-\ldots-k_s)!} \\
&\quad = \frac{m!}{k_1!.k_2!\ldots k_s!}.
\end{aligned}$$

□

Định nghĩa 1.1.22. *Cho* s *phần tử khác nhau* $a_1, a_2, \ldots, a_s$. *Một chỉnh hợp có lặp chập* m *của* s *phần tử đã cho, trong đó có* k_1 *phần tử thứ nhất* a_1, *có* k_2 *phần tử thứ hai* a_2, ..., *và có* k_s *phần tử* a_s *(với* $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$*), được gọi là một hoán vị có lặp cấp* $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ *kiểu* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ *của* s *phần tử. Số các hoán vị có lặp cấp* m *kiểu* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ *của* s *phần tử được kí hiệu là*

$$C_m(k_1, k_2, \ldots, k_s).$$